



# Influence de la diffusion longitudinale sur le transfert de matière fluide-paroi en écoulement laminaire non-établi dans un espace annulaire

S. R. DE FARIAS NETO, P. LEGENTILHOMME† et J. LEGRAND

Laboratoire de Génie des Procédés, IUT, BP 420, 44606 Saint-Nazaire Cedex, France

(Reçue le 29 septembre 1995 et sous forme finale le 3 décembre 1996)

**Abstract**—Ce travail est consacré à la modélisation numérique de l'hydrodynamique et du transfert de matière en écoulement axial laminaire non-établi dans un espace annulaire. Les équations complètes de conservation de la quantité de mouvement et de la matière sont résolues par une méthode aux éléments finis à l'aide du code FIDAP. En ce qui concerne le problème hydrodynamique, les résultats présentés dans ce travail sont en accord avec les prédictions numériques et les données expérimentales disponibles dans la littérature. Nous avons notamment confirmé le fait que le profil de la composante axiale de vitesse est caractérisé par deux pics de vitesse au voisinage de chacun des cylindres de l'espace annulaire. Ce phénomène est principalement imputable à l'influence du terme de diffusion longitudinale de la quantité de mouvement. La résolution de l'équation complète de diffusion-convection nous a permis d'explicitier l'influence du terme de diffusion longitudinale de la matière, négligé lors de l'utilisation des hypothèses simplificatrices de la théorie de la couche limite. Ce terme doit absolument être pris en compte pour une prédiction correcte du transfert de matière en régimes hydrodynamique et diffusif non établis. © 1997 Elsevier Science Ltd.

## 1. INTRODUCTION

L'analyse du développement simultané des couches limites hydrodynamique et diffusionnelle dans différentes géométries revêt une importance considérable lors du dimensionnement d'appareils industriels. Les développements simultanés des profils de vitesse et de température dans un espace annulaire cylindrique ont fait l'objet de nombreuses études théoriques visant à prédire le transfert de chaleur par convection forcée ou mixte. Parmi ces études, nous pouvons citer les travaux de Heaton *et al.* [1], dans le cas d'un espace annulaire fixe, où ceux de El-Shaarawi et Sarhan [2, 3] traitant notamment du cas d'un cylindre intérieur tournant. Pour la plupart des fluides, à l'exception des métaux liquides, le nombre de Prandtl,  $Pr = \rho C_p \nu / \lambda$ , est compris entre 1 et 10. Par conséquent, les épaisseurs des couches limites visqueuse et thermique sont voisines, ce qui autorise l'utilisation des hypothèses de la théorie de la couche limite pour simplifier les équations du mouvement et de conservation de la chaleur [4], et permet notamment de négliger le terme de diffusion longitudinale de la température,  $\partial^2 T / \partial z^2$ , devant la diffusion radiale de cette entité. En résolvant ces équations simplifiées, par des méthodes implicites aux différences finies, Shah et Farnia [5] ou Garg [6], ont analysé l'hydrodynamique dans la zone d'entrée d'un espace annulaire, et Terhmina et Mojtabi [7] ont

pu prédire correctement le transfert de chaleur dans les mêmes conditions.

Par contre, le nombre de Schmidt,  $Sc = \nu / D$ , caractéristique du transfert de matière, est de l'ordre de 1000 pour un liquide. Dans ce cas, Legentilhomme et Legrand [8] ont montré que l'utilisation des hypothèses de la théorie de la couche limite pour simplifier l'équation de diffusion-convection de la matière peut conduire à une sous-estimation très importante du transfert de masse par rapport aux résultats expérimentaux disponibles dans la littérature [9]. Il semble que pour de tels nombres de Schmidt, il n'est plus légitime de négliger la diffusion longitudinale de la matière,  $\partial^2 C / \partial z^2$ , devant la diffusion radiale [8]. L'omission de ce terme privilégie l'incidence de la composante radiale du vecteur vitesse qui a tendance à homogénéiser la concentration de l'espèce transférée, diminuant ainsi le gradient pariétal de concentration régissant le transfert de matière [8]. Par ailleurs, le fait de négliger la vitesse radiale dans l'équation de conservation de la matière conduit à une augmentation substantielle des coefficients de transfert de masse [8, 9]. Cette tendance, bien que moins prononcée, a également été observée par Coney et El-Shaarawi [10] dans le cas du transfert de chaleur à l'entrée d'un espace annulaire pour des nombres de Prandtl voisins de l'unité.

Le présent travail est consacré à une modélisation numérique de l'hydrodynamique et du transfert de matière lors de l'écoulement axial laminaire d'un

† Auteur auquel la correspondance doit être adressée

## NOMENCLATURE

$C$ ou $C_n$	concentration ou fraction massique de l'espèce transférée (mol m <sup>-3</sup> ou kg kg <sup>-1</sup> )	$R_2$	rayon du cylindre extérieur de l'espace annulaire (m)
$C_{n0}$	concentration ou fraction massique moyenne de l'espèce transférée (mol m <sup>-3</sup> ou kg kg <sup>-1</sup> )	$Re = R_2 U / \nu$	nombre de Reynolds basé sur le rayon du cylindre extérieur
$C_p$	capacité calorifique du fluide (J kg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> )	$Sc = \nu / D$	nombre de Schmidt
$D$	coefficient de diffusion de l'espèce transférée (m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> )	$Sh_G = \frac{1}{z} \int_0^z Sh_z dz$	nombre de Sherwood global
$d_p$	diamètre des billes constituant la section d'entrée de la cellule (m)	$Sh_z = 2(R_2 - R_1)k/D$	nombre de Sherwood local
$g(C_n)$	fonction définie par l'équation (11)	$U$	vitesse moyenne débitante dans l'espace annulaire (m s <sup>-1</sup> )
$h(C_n)$	fonction définie par l'équation (13)	$u_r$	composante radiale de vitesse (m s <sup>-1</sup> )
$i(C_n)$	fonction définie par l'équation (14)	$u_r^* = u_r / U$	composante radiale de vitesse adimensionnelle
$k$	coefficient local de transfert de matière (m s <sup>-1</sup> )	$u_z$	composante axiale de vitesse (m s <sup>-1</sup> )
$L$	longueur d'entrée hydrodynamique (m)	$u_z^* = u_z / U$	composante axiale de vitesse adimensionnelle
$L^*$	longueur de la surface de transfert (m)	$z$	coordonnée axiale (m)
$N = R_1 / R_2$	rapport géométrique de l'espace annulaire	$z^* = z / R_2$	coordonnée axiale adimensionnelle
$p$	pression (Pa)		
$p^* = p / \rho U^2$	pression adimensionnelle		
$Pe = Re Sc$	nombre de Péclet		
$Pr = \rho C_p \nu / \lambda$	nombre de Prandtl		
$r$	coordonnée radiale (m)		
$r^* = r / R_2$	coordonnée radiale adimensionnelle		
$R_1$	rayon du cylindre intérieur de l'espace annulaire (m)		

## Symboles grecs

$\lambda$	conductivité thermique du fluide (W m <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> )
$\rho$	masse volumique du fluide (kg m <sup>-3</sup> )
$\nu$	viscosité cinématique du fluide (m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> ).

fluide Newtonien incompressible dans la région d'entrée d'un espace annulaire cylindrique. Contrairement aux travaux cités précédemment, nous avons résolu les équations complètes de Navier-Stokes et de diffusion-convection en utilisant un code aux éléments finis (Fluids Dynamics Analysis Package, "FIDAP" [11]). La méthode aux éléments finis permet d'étudier des géométries siégeant d'écoulements complexes et a notamment fait ses preuves pour le traitement d'hydrodynamiques non-établies [12, 13]. Le principal objectif de ce travail est d'analyser l'incidence de la diffusion longitudinale de la concentration,  $\partial^2 C / \partial z^2$ , sur le transfert de masse entre le liquide et le cylindre intérieur de l'espace annulaire de manière à prédire correctement les résultats expérimentaux disponibles dans la littérature.

## 2. DESCRIPTION DU PROBLEME

## 2.1. La géométrie étudiée

La cellule annulaire correspond à la géométrie employée dans de précédents travaux par Legrand *et al.*

[14], pour mesurer les gradients pariétaux de vitesse sur le cylindre intérieur en utilisant des micro-électrodes travaillant en paroi inerte, et par Ould-Rouis *et al.* [9] pour étudier le transfert de matière local à l'aide de micro-électrodes insérées dans une paroi active. La cellule expérimentale, d'une longueur totale voisine de 600 mm est constituée de deux cylindres coaxiaux de rayons  $R_2 = 25$  mm et  $R_1 = 18$  mm pour les cylindres extérieur et intérieur respectivement (Fig. 1). L'introduction du fluide s'effectue par 4 entrées axiales séparées de 90° les unes des autres, alimentant un lit de billes de verre de 2 mm de diamètre supportées par une grille de plastique. Le profil de vitesse axiale à la sortie d'un tel dispositif a été mesuré, puis exprimé sous la forme d'une fonction de la coordonnée radiale, par Cheng et Hsu [15]. Dans la cellule décrite précédemment, Ould-Rouis *et al.* [9] ont montré, en mesurant les profils de vitesse axiale par anémométrie laser, que l'écoulement peut être considéré comme établi (profil de vitesse axial suivant la loi de Poiseuille) à des distances,  $L_e$ , comprises entre 25 et 35 mm

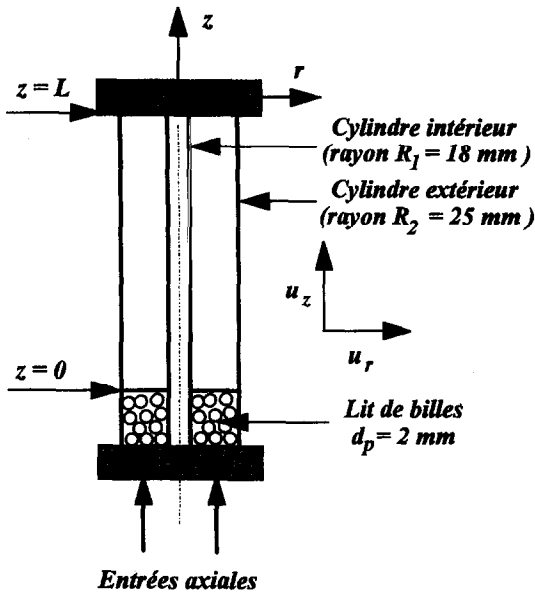


Fig. 1. Cellule expérimentale utilisée par Ould-Rouis *et al.* [9] et modélisée dans le présent travail.

pour des nombres de Reynolds basés sur la vitesse débitante et sur le diamètre hydraulique de l'espace annulaire,  $2(R_2 - R_1)$ , variant de 100 à 1000.

## 2.2. Mise en équation du problème

Considérons l'écoulement axial axisymétrique d'un fluide Newtonien incompressible, en régime permanent et sans génération de chaleur. En adoptant le système de coordonnées représenté sur la Fig. 1, les équations du mouvement se réduisent à :

$$u^* \nabla u^* = -\nabla p^* + \frac{1}{Re} \nabla^2 u^* \quad (1)$$

où  $u^*$ , le vecteur vitesse, et  $p^*$ , la pression, sont des grandeurs adimensionnelles.  $Re$  est le nombre de Reynolds basé sur le rayon du cylindre extérieur de l'espace annulaire ( $Re = R_2 U / \nu$ ),  $U$  représentant la vitesse moyenne débitante.

Par ailleurs, l'équation de continuité s'écrit :

$$\nabla u^* = 0. \quad (2)$$

En absence de réaction chimique, l'équation générale de diffusion-convection de la matière prend la forme :

$$u^* \nabla C_n = \frac{1}{Pe} \nabla (\nabla C_n) \quad (3)$$

où  $C_n$  représente la fraction massique de l'espèce transférée,  $D$  son coefficient de diffusion moléculaire dans la solution,  $Pe$  étant le nombre de Péclet ( $Pe = Re Sc$ ).

Les grandeurs adimensionnelles sont définies de la façon suivante :

$$u^* = \frac{u_z}{U} \quad \text{ou} \quad \frac{u_r}{U} \quad z^* = \frac{z}{R_2} \quad r^* = \frac{r}{R_2} \quad p^* = \frac{p}{\rho U^2} \quad (4)$$

$u_z$  et  $u_r$  désignent, respectivement, les composantes axiale et radiale du vecteur vitesse.

Pour calculer les deux composantes de la vitesse, la pression et la concentration, il est nécessaire de se donner les profils de vitesse et de concentration (ou de la fraction massique de l'espèce transférée) à l'entrée de la cellule ( $z^* = 0$ ), ainsi que les valeurs de la vitesse et de la concentration sur les parois de l'espace annulaire ( $r^* = N = R_1/R_2$  et  $r^* = 1$ ).

Les conditions d'adhérence aux parois s'écrivent :

$$u_z^* = u_r^* = 0 \quad \text{pour} \quad z^* > 0 \quad \text{et} \quad r^* = N \quad \text{et} \quad r^* = 1. \quad (5)$$

Dans la section d'entrée, nous avons supposé la vitesse radiale nulle ( $u_r^* = 0$ ) et deux profils initiaux de vitesse axiale ont été utilisés :

(i) Vitesse axiale uniforme, ce qui constitue l'hypothèse communément admise dans la plupart des travaux théoriques [5, 16–18] :

$$u_z^* = 1 \quad \forall r^* \quad \text{en} \quad z^* = 0. \quad (6)$$

(ii) Vitesse axiale non uniforme, distribution prédite par Cheng et Hsu [15] à la sortie d'un milieu poreux. Celle-ci est une fonction de rayon,  $r$ , du rapport caractéristique de l'espace annulaire,  $N = R_1/R_2$ , et du diamètre des billes de verre,  $d_p$ , constituant la section d'entrée (Fig. 1).

En ce qui concerne le transfert de matière fluide-paroi de l'espace annulaire, nous avons adopté les conditions aux frontières correspondant aux travaux expérimentaux de Legentilhomme et Legrand [19, 20] et de Ould-Rouis *et al.* [9], qui ont étudié le transfert de masse sur le cylindre intérieur d'une cellule annulaire en utilisant une méthode électrochimique consistant à mesurer le courant limite de diffusion issu de la réduction d'ions ferricyanures sur une cathode de nickel. Dans ce cas, les conditions aux frontières sont les suivantes :

$$C_n = 0.0006408 \quad \forall r^* \quad \text{en} \quad z^* = 0$$

$$C_n = 0.0006408 \quad \text{en} \quad r^* = 1 \quad \text{et} \quad z^* > 0$$

$$C_n = 0 \quad \text{en} \quad r^* = N \quad \text{et} \quad z^* > 0 \quad (7)$$

où la valeur 0.0006408 correspond à la fraction massique des ions ferricyanures dans la solution électrolytique utilisée par Legentilhomme et Legrand [19, 20] et Ould-Rouis *et al.* [9], correspondant à une concentration en ferricyanure de potassium ( $K_3Fe(CN)_6^{3-}$ ) égale à  $10^{-3} \text{ mol l}^{-1}$  dans une solution de soude à  $1 \text{ mol l}^{-1}$  contenant du ferrocyanure de potassium ( $K_4Fe(CN)_6^{4-}$ ) à  $5 \cdot 10^{-2} \text{ mol l}^{-1}$ .

2.3. *Maillage et méthode de résolution*

Pour résoudre le système d'équations (1) à (3), nous avons employé le code de calcul aux éléments finis FIDAP [11]. Nous avons créé une maille en deux dimensions (l'écoulement étant axisymétrique) composée de 20 900 éléments quadrilatères à 4 noeuds.

Ce maillage permet d'assurer la convergence et la stabilité de la méthode de résolution quelles que soient les valeurs des paramètres géométriques ( $N = R_1/R_2$ ) et hydrodynamiques ( $Re$ ,  $Sc$ ) utilisées dans la suite de ce travail. Bien que la résolution des équations du mouvement nécessite un maillage beaucoup moins fin, l'étude du transfert de matière pariétal requiert un raffinement du maillage beaucoup plus élevé au voisinage du cylindre intérieur siège du transfert de masse. En effet, la couche limite diffusionnelle est beaucoup plus fine que son homologue hydrodynamique. Par conséquent, les éléments au voisinage de la paroi interne doivent être de très faibles dimensions et suffisamment nombreux dans la direction radiale de manière à échantillonner correctement la couche limite diffusionnelle, assurant ainsi, pour une configuration donnée, l'indépendance du coefficient de transfert de matière calculé par rapport au maillage utilisé.

Les équations (1) à (3) ont été résolues en utilisant un algorithme de ségrégation, lequel évite le traitement de l'ensemble du système d'équations en une seule étape. En effet, la matrice du système global est décomposée en sous-matrices dans lesquelles chacun des degrés de liberté du problème (composantes de vitesse, pression, concentration) est associé à une seule équation de conservation. Ces sous-systèmes sont résolus en série par une procédure d'élimination de Gauss, la convergence globale du processus étant assurée par une méthode itérative. Cette procédure permet de diminuer la quantité de mémoire nécessaire, chacune des matrices des sous-systèmes étant stockée et traitée séparément.

3. ANALYSE DES RÉSULTATS

3.1. *Hydrodynamique*

Le but de ce travail n'est pas d'étudier en détail l'hydrodynamique de l'écoulement axial annulaire, celle-ci ayant fait l'objet de nombreux travaux numériques dont le lecteur pourra trouver une synthèse exhaustive dans le travail de Nouar *et al.* [18] qui résume et compare les différentes méthodes, tant analytiques que numériques, permettant de calculer l'évolution des profils des composantes axiale et radiale du vecteur vitesse. Cependant, de manière à valider le champ de vitesse issu de notre code aux éléments finis, nous avons représenté, sur la Fig. 2, l'évolution des profils de la composante axiale de vitesse,  $u_z^* = u_z/U$ , en fonction de la coordonnée radiale adimensionnelle,  $r^* = r/R_2$ , pour différentes positions axiales par rapport à l'entrée de l'espace annulaire. Les profils présentés sur la Fig. 2 ont été obtenus pour un nombre de Reynolds égal à 583, correspondant à une configura-

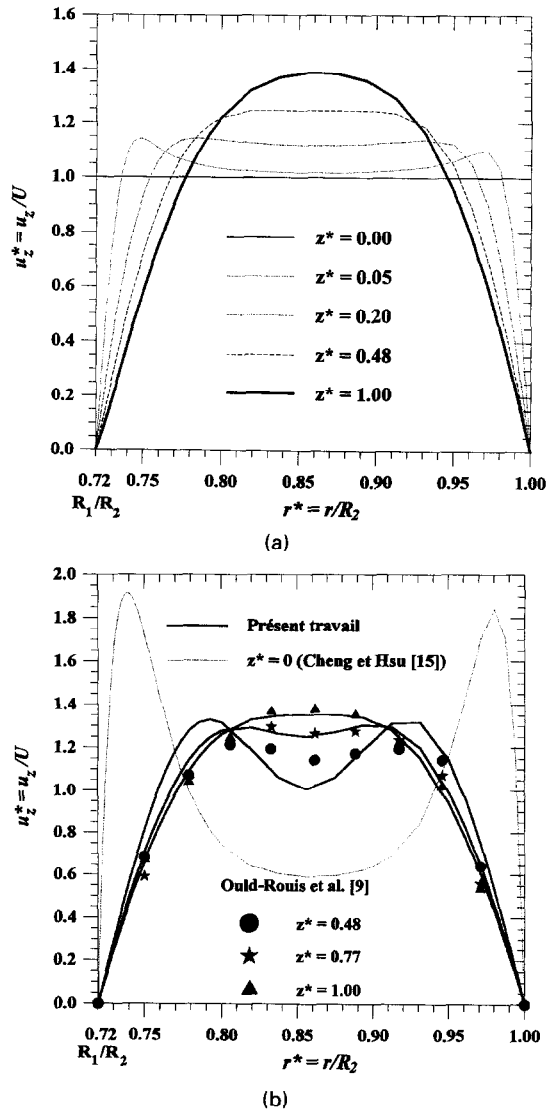


Fig. 2. Distribution de la composante axiale de vitesse pour  $N = 0.72$ : (a) profil initial uniforme ( $Re = 583$ ); (b) profil initial correspondant à la sortie d'un milieu poreux ( $Re = 583$ ).

tion étudiée expérimentalement par Ould-Rouis *et al.* [9]. La Fig. 2(a) correspond à une vitesse axiale uniforme à l'entrée, la Fig. 2(b) étant issue de l'utilisation de la distribution de vitesse axiale en sortie d'un milieu poreux établie à partir des travaux de Cheng et Hsu [15]. Les profils de vitesse donnés sur la Fig. 2 sont caractérisés par 2 pics de vitesse encadrant un minimum dont la position radiale est confondue avec celle correspondant au maximum de vitesse axiale observé en régime pleinement développé (profil de Poiseuille). Ces pics de vitesse sont évidemment plus prononcés dans le cas du profil initial correspondant à la sortie d'un milieu poreux (Fig. 2(b)), pour lequel les 2 pics sont initialement présents du fait de l'augmentation locale de la porosité au voisinage des parois de la section d'entrée de la cellule annulaire (Cheng et Hsu [15]). Cependant, comme le signalent Nouar *et al.*

[18], ces survitesses locales ne sont pas uniquement imputables au profil initial, car elles apparaissent également, bien que de manière moins prononcée, en employant une vitesse initiale uniforme (Fig. 2(a)). De plus, Abarbanel *et al.* [21] ont prouvé que cette forme de profil de vitesse ne résulte pas de l'amplification d'éventuelles erreurs de troncature inhérentes à l'emploi d'une méthode numérique. Des profils de vitesse axiale semblables à ceux présentés sur la Fig. 2 ont été précédemment observés par Wang et Longwell [22] dans un canal droit, ou par Friedman *et al.* [23] et Mohrotra et Patience [24] dans un tube, en résolvant les équations complètes du mouvement. Par contre, l'emploi des hypothèses de la théorie de la couche limite pour simplifier les équations du mouvement entraîne la disparition des pics de vitesse [8–10]. Ces pics semblent par conséquent engendrés par les termes de diffusion longitudinale de la quantité de mouvement ( $\partial^2 u_r / \partial z^2$  et  $\partial^2 u_z / \partial z^2$ ) négligés lors de l'utilisation des hypothèses de la couche limite [4].

Sur les Fig. 2(b,c), nous avons également comparé nos résultats numériques avec des profils de vitesse mesurés par Ould-Rouis *et al.* [9], par anémométrie Laser Doppler dans la cellule schématisée sur la Fig. 1. Pour les faibles valeurs de la coordonnée axiale adimensionnelle, les résultats numériques issus du code aux éléments finis sont relativement différents des résultats expérimentaux de Ould-Rouis *et al.* [9], les deux pics de vitesse étant amplifiés par rapport à ceux observés expérimentalement. Ce fait semble principalement imputable au profil initial de vitesse axiale issu des travaux de Cheng et Hsu [15] qui est caractérisé par des vitesses particulièrement élevées au voisinage des parois, et probablement surévaluées pour la configuration expérimentale de Ould-Rouis *et al.* [9]. En effet, le profil de vitesse en sortie d'un milieu poreux a été obtenu par Cheng et Hsu [15] en résolvant analytiquement les équations du mouvement dans un lit de sphères caractérisé par un profil radial de porosité tenant compte de l'existence de chemins préférentiels le long des parois. Le profil de porosité est lié à la réalisation du milieu poreux. Ainsi, il est tout à fait possible que les pics de vitesse soient surestimés par l'équation de Cheng et Hsu [15]. Cependant pour des cotes axiales réduites,  $z^*$ , supérieures à environ 0.7 (Fig. 3(b)), les profils de vitesse axiale calculés à l'aide du logiciel FIDAP sont en accord tout à fait satisfaisant avec les données expérimentales de Ould-Rouis *et al.* [9]. Pour un nombre de Reynolds plus élevé, les effets du décalage entre le profil initial de Cheng et Hsu [15] et celui issu de la configuration expérimentale de Ould-Rouis *et al.* [9] se font sentir plus loin le long de l'espace annulaire. Cependant, pour des valeurs de  $z^*$  supérieures à 1, les résultats numériques traduisent correctement les données expérimentales.

Sur la Fig. 3, nous avons représenté les profils de la composante radiale du vecteur vitesse correspondant à la vitesse axiale représentée sur la Fig. 2(b). La vitesse radiale est dirigée des parois vers le centre de l'espace annulaire et présente la même allure que celle

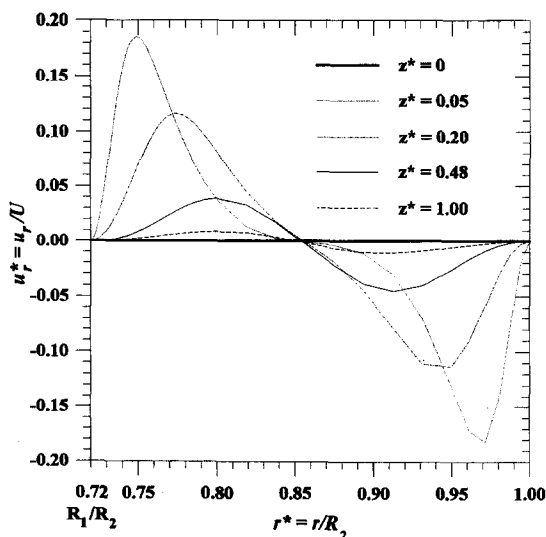


Fig. 3. Distribution de la composante radiale de vitesse correspondant à la vitesse axiale représentée sur la Fig. 2(b).  $N = 0.72$  et  $Re = 583$ .

calculée par Legentilhomme et Legrand [8] en résolvant les équations simplifiées de la couche limite par une méthode de différences finies. Comme l'ont signalé ces auteurs, l'existence d'une vitesse radiale dirigée des parois vers le centre de l'espace annulaire (Fig. 3) a tendance à homogénéiser le fluide, entraînant par conséquent une diminution du gradient pariétal de concentration qui régit le transfert de masse. Nous reviendrons sur ce point dans le paragraphe suivant consacré à l'analyse du transfert de matière.

A partir des profils de la composante axiale du vecteur vitesse calculés numériquement, nous avons déterminé la longueur d'entrée hydrodynamique rapportée au rayon du cylindre extérieur de l'espace annulaire,  $L/R_2$ . Par analogie avec les travaux de Ould-Rouis *et al.* [9],  $L$  est la position axiale à partir de laquelle le profil de la vitesse axiale admet un maximum dont la valeur est à 1% celle obtenue en régime établi, la composante radiale de la vitesse étant alors nulle. Pour les deux profils initiaux de vitesse axiale décrits précédemment, dans un espace annulaire de rapport des rayons  $N = R_1/R_2 = 0.72$ ,  $L/R_2$  est proportionnel au nombre de Reynolds :

- Vitesse axiale uniforme en  $z^* = 0$  :

$$\frac{L}{R_2} = 5.36 \cdot 10^{-3} Re. \quad (8)$$

- Vitesse axiale de Cheng et Hsu [15] en  $z^* = 0$  :

$$\frac{L}{R_2} = 4.73 \cdot 10^{-3} Re. \quad (9)$$

### 3.2. Transfert de matière liquide-paroi du cylindre intérieur

Sur la Fig. 4, nous avons représenté un exemple de résultats illustrant l'intensité du transfert local de

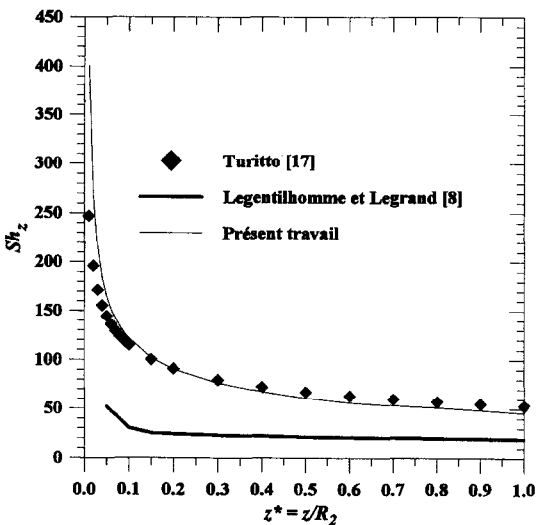


Fig. 4. Comparaison du transfert local de matière déterminé en résolvant l'équation de diffusion-convection complète avec celui calculé en utilisant les hypothèses de la théorie de la couche limite et celui obtenu en écoulement pleinement développé. Profil initial de vitesse uniforme.  $N = 0.80$ ,  $Re = 500$  et  $Sc = 1000$ .

matière entre le fluide en écoulement axial non-établi et le cylindre intérieur d'un espace annulaire de rapport caractéristique  $N = R_1/R_2 = 0.8$ ; pour un nombre de Reynolds, basé sur  $R_2$ , égal à 500 et un nombre de Schmidt de 1000, et ceci pour une vitesse axiale uniforme à l'entrée. Le transfert de masse est caractérisé par un nombre de Sherwood local,  $Sh_z$ , défini par :

$$Sh_z = \frac{2(R_2 - R_1)k}{D} = \frac{2(1 - N)}{C_{n0}} \frac{\partial C_n}{\partial r^*} \Big|_{r^*=N} \quad (10)$$

$k$  représente le coefficient local de transfert de matière et  $C_{n0}$  la fraction massique moyenne en espèce transférée ( $C_{n0} = 0.0006408$ ).

Sur la Fig. 4, nous avons également représenté le nombre de Sherwood local déterminé par Turitto [17] en présence d'un profil hydrodynamique pleinement développé. On peut remarquer que le transfert de matière calculé en écoulement axial non-établi en résolvant l'équation de diffusion-convection complète (relation (3)) est supérieur, dans la zone d'entrée, à celui obtenu en écoulement pleinement développé par Turitto [17], et ceci même en utilisant un profil initial de vitesse axiale uniforme. Pour des valeurs de  $z^*$  supérieures à environ 0.2, ce qui correspond à une distance de l'ordre de 5 mm pour un cylindre extérieur de 25 mm de rayon, l'intensité du transfert de masse devient comparable à celle prédite par Turitto [17] en écoulement établi, cette distance augmentant dans le cas de l'utilisation d'une vitesse axiale initiale non uniforme [9].

Sur la Fig. 5, nous avons comparé les résultats numériques issus de notre code aux éléments finis avec des données expérimentales de Ould-Rouis *et al.* [9]

obtenues au moyen d'une technique électrochimique mettant en oeuvre des microélectrodes de nickel insérées dans le cylindre intérieur, lui même en nickel, de la cellule annulaire schématisée sur le Fig. 1. Nous pouvons remarquer que l'utilisation du profil initial de vitesse axiale établi par Cheng et Hsu [15] et la résolution de l'équation de diffusion-convection complète conduisent à une prédiction tout à fait acceptable du transfert local de matière dans la géométrie schématisée sur la Fig. 1. Les fortes valeurs du nombre de Sherwood local, calculées à la base de l'espace annulaire revêtent une importance particulière lors du dimensionnement d'appareillages dans lesquels le transfert débute dès l'entrée du fluide dans le dispositif.

A partir de résultats expérimentaux concernant le transfert local de matière sur le cylindre interne du dispositif représenté sur la Fig. 1, Ould-Rouis *et al.* [9] ont établi une équation de corrélation caractérisant le transfert de matière local. L'intégration de cette relation sur une longueur,  $L^*$ , correspondant à la longueur de la section de transfert, la couche limite diffusionnelle se développant dès l'entrée du fluide dans la cellule, permet de calculer le nombre de Sherwood global,  $Sh_G$ .

Sur la Fig. 6, nous avons représenté  $Sh_G$  en fonction du nombre de Schmidt pour deux valeurs du nombre de Reynolds et une section de transfert d'une longueur,  $L^*$ , égale au rayon,  $R_2$ , du cylindre extérieur de l'espace annulaire. Nos résultats numériques, obtenus par intégration du nombre de Sherwood local, sont tout à fait en accord avec les données expérimentales de Ould-Rouis *et al.* [9], confirmant notamment le fait que l'intensité du transfert de matière sur le cylindre interne est proportionnelle au nombre de Schmidt élevé à la puissance 1/3.

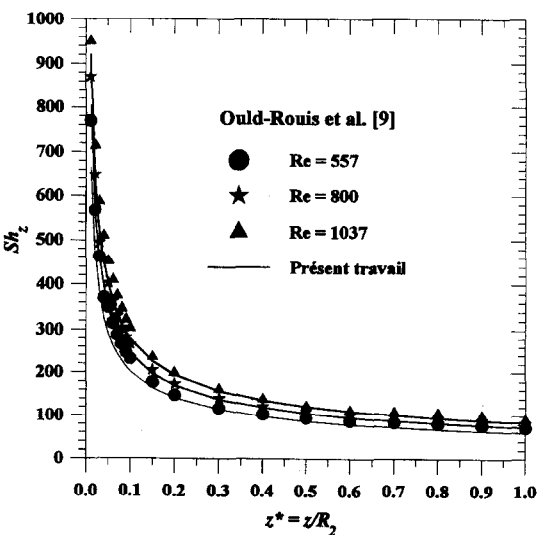


Fig. 5. Comparaison du transfert local de matière déterminé dans le présent travail avec les données expérimentales de Ould-Rouis *et al.* [9].  $N = 0.72$  et  $Sc = 1255$  pour différents nombres de Reynolds. Profil initial de vitesse axiale d'après Cheng et Hsu [15].

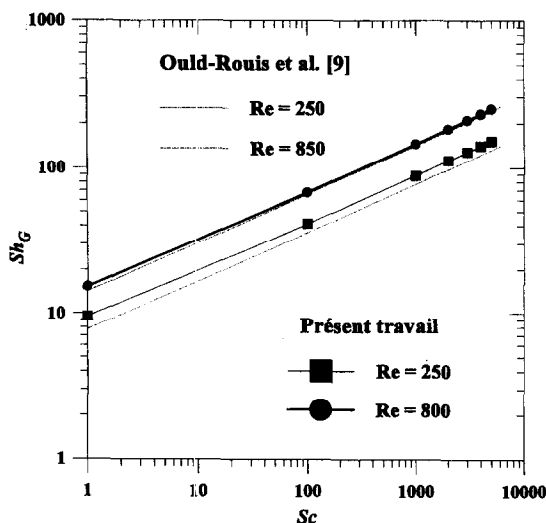


Fig. 6. Influence du nombre de Schmidt sur le transfert de matière global. Comparaison avec les résultats expérimentaux de Ould-Rouis *et al.* [9].  $N = 0.72$  et  $L^* = R_2 = 2.5$  cm.

Sur la Fig. 4, nous avons également représenté les résultats obtenus par Legentilhomme et Legrand [8] en résolvant l'équation de diffusion-convection simplifiée avec les hypothèses de couche limite. Comme l'ont signalé ces auteurs, dans ces conditions,  $Sh_z$  est très inférieur à la valeur obtenue en écoulement établi ; ce fait est en total désaccord avec les résultats expérimentaux de Ould-Rouis *et al.* [9] et de Qi et Savinell [25] qui ont montré que, dans la zone d'entrée d'un espace annulaire ou entre deux plaques parallèles, l'intensité du transfert de masse est plus importante qu'en régime laminaire pleinement développé. D'après Legentilhomme et Legrand [8], cette anomalie semble due à l'incidence négative, sur l'intensité du transfert de masse, de la composante radiale du vecteur vitesse qui a tendance à homogénéiser le fluide sur toute la section de l'espace annulaire puisqu'elle est dirigée des parois vers le centre de l'espace inter-cylindres. L'allure des profils de vitesse radiale est admise par tous les auteurs ayant résolu le problème hydrodynamique en utilisant ou non les hypothèses simplificatrices de couche limite appliquées aux équations de Navier-Stokes [8–10, 18]. Cependant,  $u_r$  peut atteindre 10% de la composante axiale de vitesse (Fig. 2(b) et 3), ce qui semble contraire aux conditions d'application des hypothèses simplificatrices de la couche limite [4] qui stipulent notamment que  $u_r/U$  doit être d'au moins un ordre de grandeur inférieur à  $u_z/U$ . D'après Legentilhomme et Legrand [8], la vitesse radiale a une incidence négative surestimée sur le transfert de masse, augmentant considérablement le terme  $u_r \partial C_n / \partial r^*$  dans l'équation de diffusion-convection et le rendant du même ordre de grandeur que le terme  $u_z \partial C_n / \partial z^*$ . Nous supposons que cet accroissement n'est pas compensé par la diffusion longitudinale de la matière,  $\partial^2 C_n / \partial z^{*2}$ , qui n'est pas prise en compte dans l'équation simplifiée avec les hypothèses de couche limite. La résolution

complète de l'équation (3), tenant compte de la diffusion longitudinale, devrait permettre d'équilibrer cet effet de la vitesse radiale sur le transfert de matière. Pour vérifier ce fait, nous avons caractérisé l'influence de la diffusion longitudinale par le rapport suivant :

$$g(C_n) = \frac{\frac{\partial^2 C_n}{\partial z^{*2}}}{\frac{\partial^2 C_n}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial C_n}{\partial r^*} + \frac{\partial^2 C_n}{\partial z^{*2}}} \quad (11)$$

Les différents termes de l'équation (11) ont été calculés à partir de corrélations de type loi puissance des profils de concentration issus du code FIDAP. Quel que soit le nombre de Schmidt, au voisinage du cylindre interne et immédiatement à l'entrée de la cellule, la diffusion longitudinale de la masse peut représenter près de 80% du membre de droite de l'équation de diffusion-convection. Cependant, comme l'illustre la Fig. 7, l'incidence de la diffusion longitudinale de la matière,  $\partial C_n / \partial z^{*2}$ , décroît d'autant plus rapidement, lorsque l'on s'éloigne de la section d'entrée, que le nombre de Reynolds est élevé. En effet, lorsque  $Re$  augmente, la couche limite diffusionnelle se développe plus rapidement, la diffusion longitudinale de la matière devenant alors négligeable devant le terme de diffusion radiale.

Les résultats représentés sur la Fig. 7 ne permettent pas, à eux seuls, d'expliquer le fait que les hypothèses simplificatrices de la théorie de la couche limite [4] soient justifiées pour les faibles valeurs du nombre de Schmidt et conduisent à des prédictions fortement erronées du transfert de matière dans le cas de forts nombres de Schmidt, en présence d'un écoulement axial non-établi, comme nous l'avons montré lors d'une précédente investigation numérique (Legentilhomme et Legrand [8]). Pour analyser l'incidence de la composante radiale du vecteur vitesse, nous avons

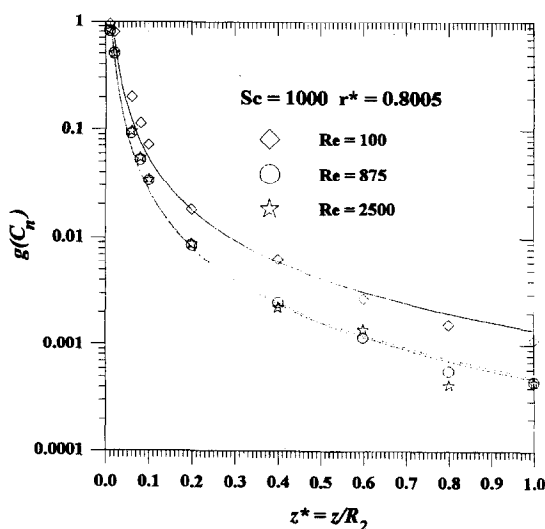


Fig. 7. Influence du nombre de Reynolds sur la diffusion longitudinale de la matière pour  $Sc = 1000$ ,  $N = 0.8$ .

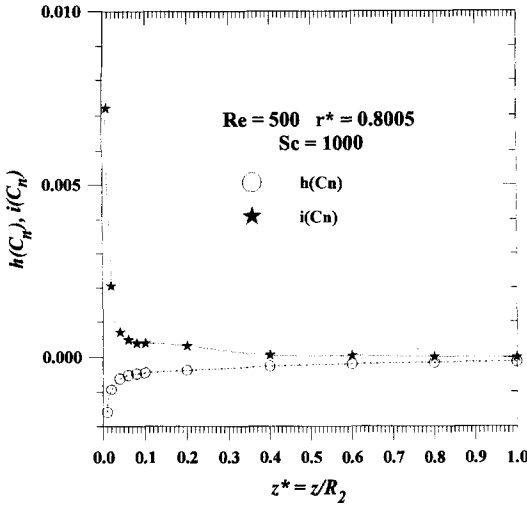


Fig. 8. Influence relative de la diffusion longitudinale de la matière par rapport aux termes convectifs de l'équation de conservation de la matière.  $N = 0.8$ ,  $Re = 500$  et  $Sc = 1000$ .

comparé les différents termes intervenant dans l'équation de diffusion-convection de la matière. En adoptant le jeu de variables adimensionnelles définies par l'équation (4), l'équation de conservation de la matière peut s'écrire :

$$u_z^* \frac{\partial C_n}{\partial z^*} + u_r^* \frac{\partial C_n}{\partial r^*} = \frac{1}{ReSc} \left[ \frac{\partial^2 C_n}{\partial z^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \frac{\partial C_n}{\partial r^*} \right) \right]. \quad (12)$$

Sur la Fig. 8, nous avons représenté en fonction de  $z^*$ , pour  $Sc = 1000$  et  $Re = 500$ , les rapports  $h(C_n)$  et  $i(C_n)$  définis par :

$$h(C_n) = \frac{1}{ReSc} \left\{ \frac{\frac{\partial^2 C_n}{\partial z^{*2}}}{u_z^* \frac{\partial C_n}{\partial z^*}} \right\} \quad (13)$$

$$i(C_n) = \frac{1}{ReSc} \left\{ \frac{\frac{\partial^2 C_n}{\partial z^{*2}}}{u_r^* \frac{\partial C_n}{\partial r^*}} \right\}. \quad (14)$$

Pour une valeur élevée du nombre de Schmidt, la diffusion longitudinale de la matière semble négligeable devant les deux termes de transport convectif (Fig. 8). Cependant, comme l'illustre la Fig. 9, pour des nombres de Schmidt modérés ( $1 \leq Sc \leq 100$ ), la diffusion longitudinale de la matière compense le terme de transport radial ( $u_r^* \partial C_n / \partial r^*$ ), alors que ce n'est pas le cas pour un nombre de Schmidt égal à 1000. Ce fait confirme les travaux de Legentilhomme et Legrand [8] qui ont montré que pour de faibles valeurs du nombre de Schmidt, l'équation de diffusion convection simplifiée en utilisant la théorie de la couche limite, dans laquelle on néglige le terme  $\partial^2 C_n / \partial z^{*2}$ , permet de prédire correctement le transfert de

matière en présence d'un écoulement annulaire axial non-établi, que l'on tienne compte ou non de la vitesse radiale. Par contre, pour  $Sc \cong 1000$ , le fait de négliger la diffusion longitudinale de la matière tout en tenant compte du transport radial conduit à une sous-évaluation très importante du coefficient de transfert fluide-cylindre intérieur de la cellule annulaire par rapport aux données expérimentales disponibles dans la littérature.

#### 4. CONCLUSIONS

La modélisation numérique de l'hydrodynamique et du transfert de matière en présence d'un écoulement axial laminaire non-établi dans un espace annulaire cylindrique a été réalisée en utilisant un code aux éléments finis (FIDAP, [11]) permettant de résoudre les équations complètes du mouvement et de diffusion-convection de la matière. Nous avons montré que les profils de vitesse axiale prédits sont en accord tout à fait satisfaisant avec d'autres travaux numériques, d'une part, et avec des résultats expérimentaux disponibles dans la littérature [9], d'autre part. La résolution des équations de Navier-Stokes complètes et du bilan de matière a montré l'influence de la diffusion longitudinale de la quantité de mouvement qui engendre des survitesses au voisinage des cylindres de l'espace annulaire. Ce comportement n'apparaît pas en utilisant les équations simplifiées de la théorie de la couche limite dans lesquelles la diffusion longitudinale est négligée [8, 9, 18].

En ce qui concerne le transfert de matière liquide-cylindre intérieur de l'espace annulaire, nous avons montré que le terme de diffusion longitudinale revêt une importance particulière immédiatement à l'entrée de la cellule. Sa prise en compte dans l'équation de diffusion-convection de la matière conduit à une pré-

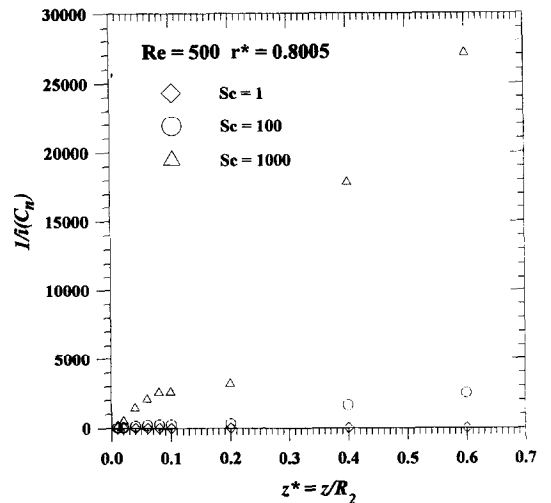


Fig. 9. Influence du nombre de Schmidt sur l'incidence relative de la diffusion longitudinale de la matière par rapport au terme de convection radiale de l'équation de conservation de la matière.  $N = 0.8$  et  $Re = 500$ .



diction du transfert local tout à fait acceptable par rapport aux résultats expérimentaux de Ould-Rouis *et al.* [9] dans une telle configuration. La diffusion longitudinale de la masse ne peut être négligée pour des nombres de Schmidt de l'ordre de 1000, contrairement à la diffusion longitudinale de la température, pour des nombres de Prandtl voisins de l'unité, dans un écoulement similaire [10].

## RÉFÉRENCES

1. Heaton, H. S., Reynolds, W. C. et Kay, W. M., Heat transfer in annular passages. Simultaneous development of velocity and temperature fields in laminar flow. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1964, **7**, 765–781.
2. El-Shaarawi, M. A. I. et Sharan, A., Free-convection effects on the developing laminar flow in vertical concentric annuli. *Journal of Heat Transfer*, 1980, **102**, 617–622.
3. El-Shaarawi, M. A. I. et Sharan, A., Combined forced-free laminar convection in the entry region of a vertical annulus with rotating inner cylinder. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1982, **25**, 175–186.
4. Schlichting, H., *Boundary Layer Theory*, 7ème éd. McGraw-Hill, New York, 1979.
5. Shah, V. L. et Farnia, K., Flow in the entrance of annular tubes. *Computers and Fluids*, 1974, **2**, 285–294.
6. Garg, V. K., Finite difference solution for axially developing flow in an annulus. *2ème Conférence Internationale on Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flow*, Venise, Italie, 1981.
7. Thermina, O. et Mojtabi, A., Ecoulements de convection forcée en régime dynamique non-établi dans un espace annulaire. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1988, **31**, 583–590.
8. Legentilhomme, P. et Legrand, J., Modélisation numérique du transfert de matière dans un écoulement annulaire faiblement tourbillonnaire non-entretenu. *Canadian Journal of Chemical Engineering*, 1993, **71**, 299–311.
9. Ould-Rouis, M., Salem, A., Legrand, J. et Nouar, S., Etude numérique et expérimentale du transfert de matière et de quantité de mouvement dans un écoulement annulaire laminaire non-établi. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1995, **38**, 953–957.
10. Coney, J. E. R. et El-Shaarawi, M. A. I., Finite difference analysis for laminar flow heat transfer in concentric annuli with simultaneously developing hydrodynamic and thermal boundary layers. *International Journal of Numerical Engineering*, 1975, **9**, 17–38.
11. Fluid Dynamics Analysis Package, FIDAP 7.0, *Users Manual*. Fluid Dynamics International, Evanston, IL, 1993.
12. Dombrowsky, N., Foumeny, E. A., Oukawara, S. et Riza, A., Influence of Reynolds number on the entry length and pressure drop for laminar flow. *Canadian Journal of Chemical Engineering*, 1993, **71**, 472–476.
13. Dupont, P., Parkinson, E., Bellet, L., Mirschi, R. et Huang, J., Three-dimensional flow analysis of an hydraulic Francis turbine. *Actes du Congrès des Utilisateurs de FIDAP*, Paris, France, 1994.
14. Legrand, J., Legentilhomme, P., Aouabed, H., Ould-Rouis, M., Nouar, C. et Salem, A., Electrodiffusion determination of the momentum transfer in annular flows: axial developing and swirling decaying flows. *Journal of Applied Electrochemistry*, 1991, **21**, 1063–1067.
15. Cheng, P. et Hsu, C. T., Fully developed forced convective flow through an annular packed-sphere bed with wall effects. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1986, **29**, 1843–1853.
16. Atkinson, B., Brocklebank, M. P., Card, C. C. H. et Smith, J. H., Low Reynolds number developing flows. *AIChE Journal*, 1969, **15**, 548–553.
17. Turitto, V. T., Mass transfer in annuli under conditions of laminar flow. *Chemical Engineering Science*, 1975, **30**, 503–509.
18. Nouar, C., Ould-Rouis, M., Legrand, J. et Salem, A., Developing laminar flow in the entrance region of annuli. Review and extension of standard resolution methods to hydrodynamic problem. *International Journal of Engineering Science*, 1995, **33**, 1517–1534.
19. Legentilhomme, P. et Legrand, J., Overall mass transfer in swirling decaying flow in annular electrochemical cells. *Journal of Applied Electrochemistry*, 1990, **20**, 216–222.
20. Legentilhomme, P. et Legrand, J., The effects of inlet conditions on mass transfer in swirling decaying flow. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1991, **34**, 1281–1291.
21. Abarbanel, S., Bennet, S., Brandt, A. et Gillis, J., Velocity profiles of flow at low Reynolds numbers. *Journal of Applied Mechanics*, 1970, **37**, 2–4.
22. Wang, V. L. et Longwell, P. A., Laminar flow in the inlet section of parallel plates. *AIChE Journal*, 1964, **10**, 323–329.
23. Friedman, M., Gillis, J. et Liron, N., Laminar flow in pipe at low and moderate Reynolds numbers. *Applied Science Research*, 1968, **19**, 426–438.
24. Mehrotra, A. K. et Patience, G. S., Unified entry length for Newtonian and power-law fluids in laminar pipe flow. *Canadian Journal of Chemical Engineering*, 1990, **68**, 529–533.
25. Qi, J. et Savinell, R. F., Mass transfer in laminar flow parallel plate electrolytic cell with simultaneous development of velocity and concentration boundary layers. *Journal of Applied Electrochemistry*, 1990, **20**, 885–892.

## INFLUENCE OF LONGITUDINAL DIFFUSION ON LIQUID-WALL MASS TRANSFER IN DEVELOPING AXIAL LAMINAR FLOW IN AN ANNULUS

**Abstract**—This work deals with the numerical modelling of hydrodynamics and mass transfer in developing laminar axial flow in an annulus. Complete momentum and mass conservation equations are solved by a finite element method using the FIDAP code. Concerning the diffusional problem, the results are in keeping with numerical predictions and experimental data available in the literature. We have particularly confirmed the fact that the axial velocity profile is characterized by velocity peaks in the vicinity of each cylinder of the annulus. This phenomenon is mainly due to the influence of the momentum longitudinal diffusion term. Resolution of the complete diffusion-convection equation allowed us to clarify the influence of the mass longitudinal diffusion term, neglected when using hypotheses of the boundary layer theory. The diffusion term must be taken into account for a correct prediction of the mass transfer in developing hydrodynamic and diffusional flow regimes. © 1997 Elsevier Science Ltd.